El conjunto R^3

Terna

$$R^3 = \{ (x, y, z) \,/\, x \in R, y \in R, z \in R \}$$

Primera componente

Segunda componente

Tercera componente

Igualdad de ternas: $(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{array}}$

Operaciones en R^3

Suma en R^3 (suma de ternas)

- $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

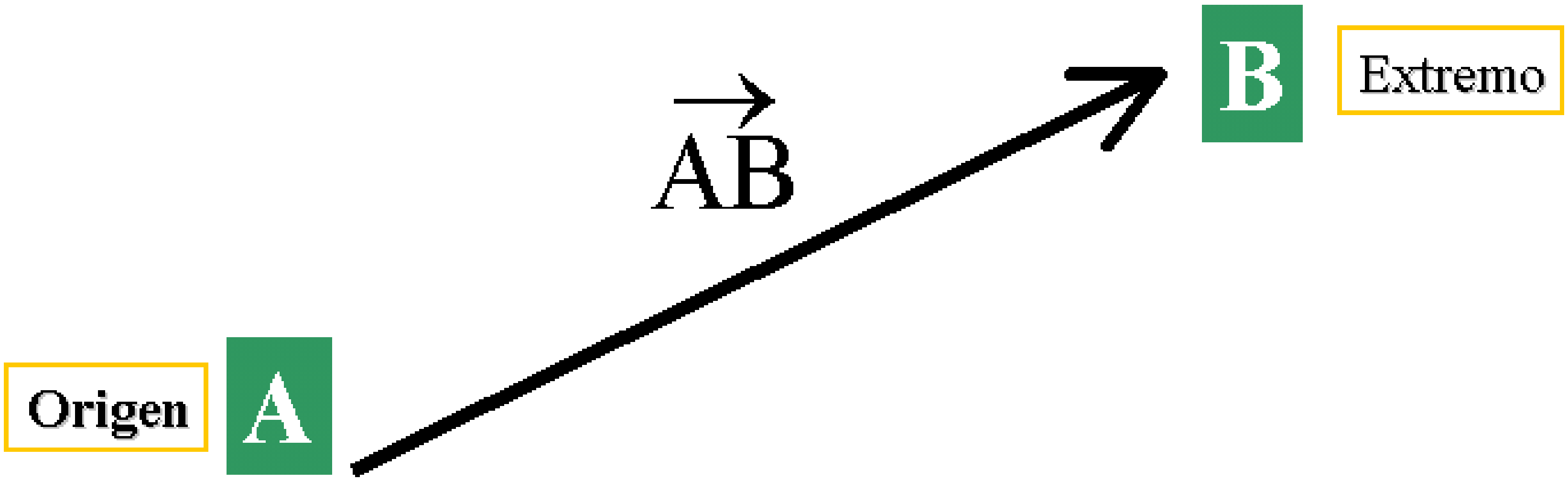
Producto de un número real por una terna de R^3:

- $a(x, y, z) = (ax, ay, az)$

Vectores fijos en el espacio

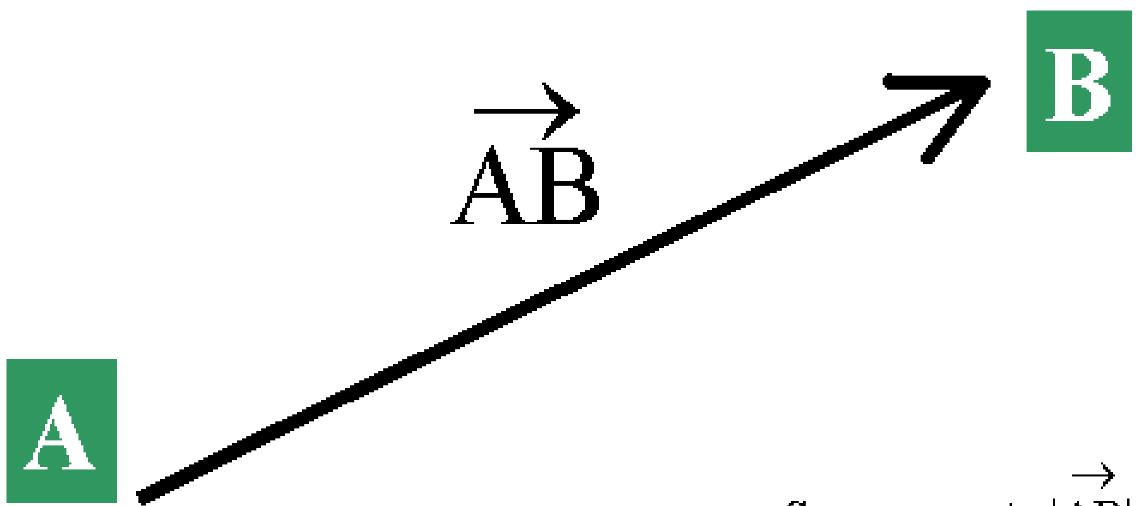
Vector fijo:

Es un segmento orientado, con el sentido del recorrido que va desde el origen al extremo.



Módulo de un vector fijo

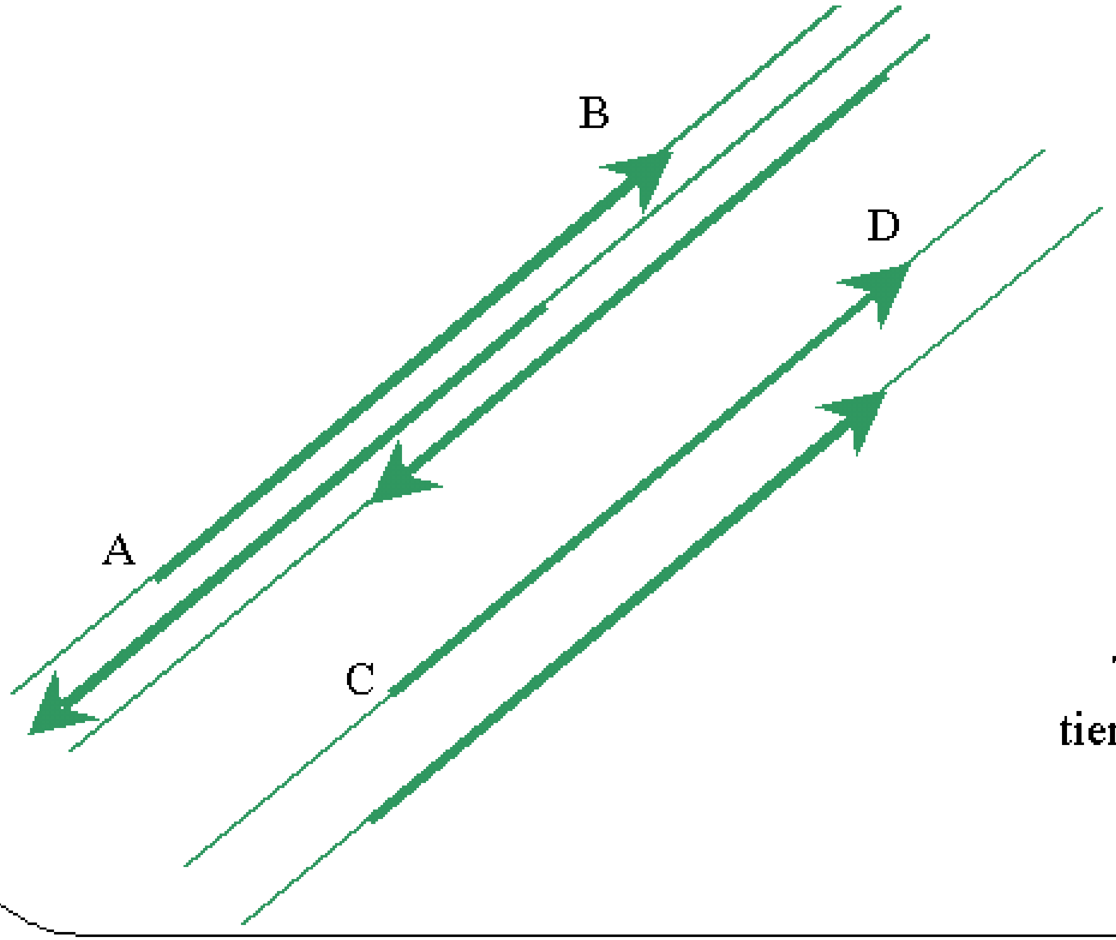
El módulo de un vector fijo es la longitud del segmento AB



Se representa $|\overrightarrow{AB}|$

Dirección de un vector fijo

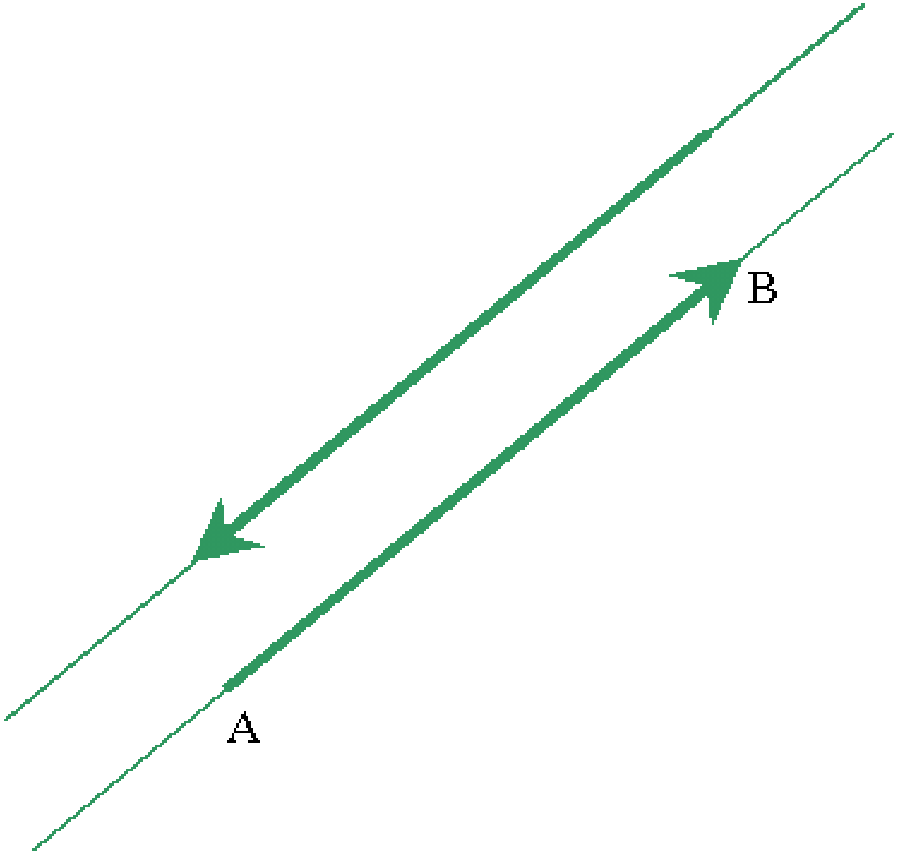
Dirección de un vector fijo: es la dirección de la recta que pasa por A y B



Todos estos vectores tienen la misma dirección.

Sentido de un vector fijo

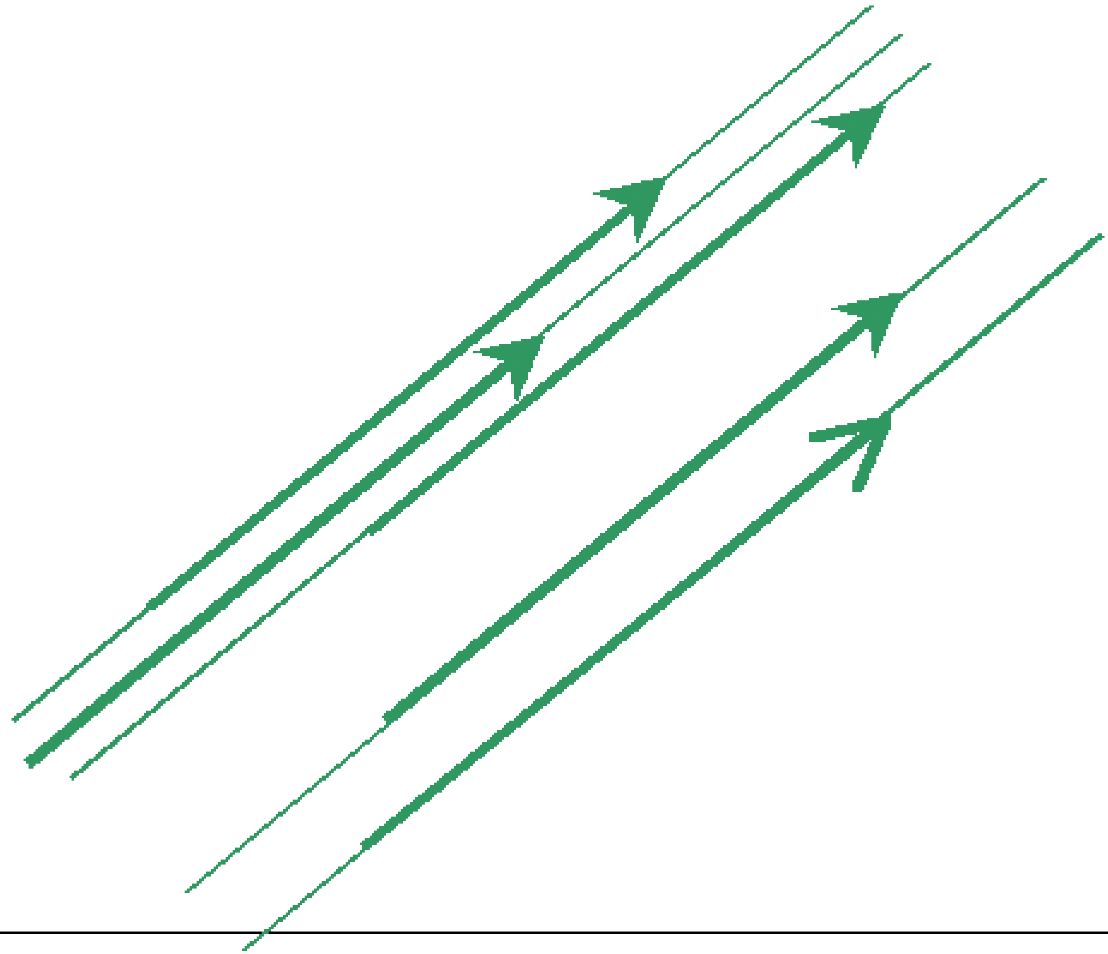
Sentido de un vector fijo es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos desde A a B



Estos vectores
tienen la misma dirección y
sentido contrario.

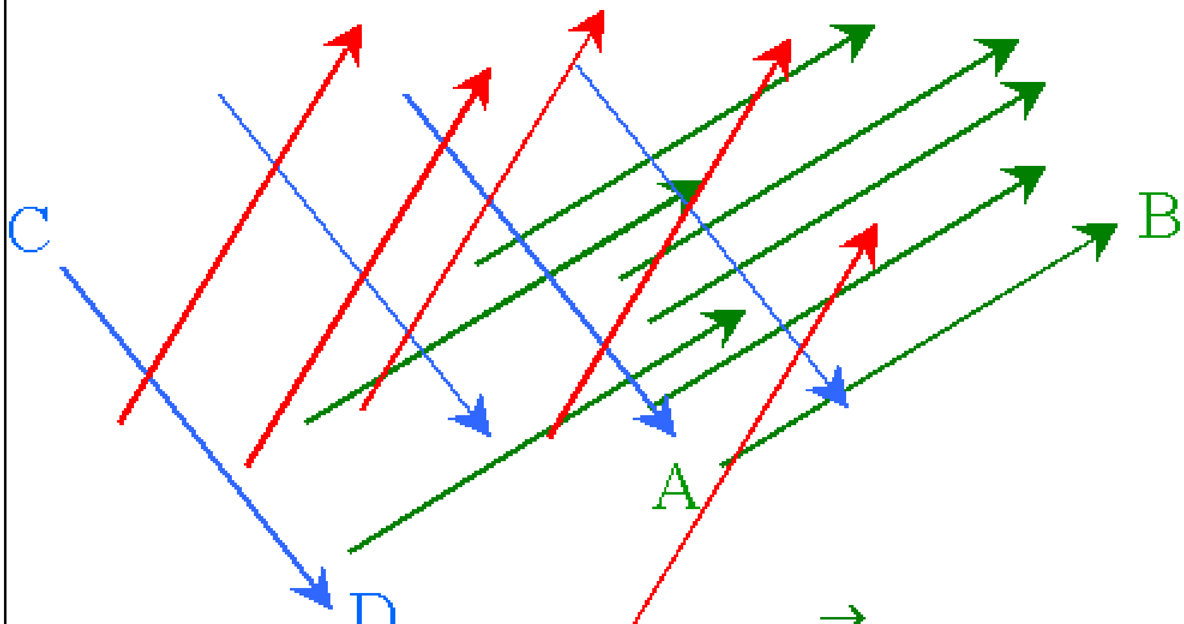
Vectores equipolentes

Dos vectores fijos son equipolentes si y sólo si tienen igual módulo, igual dirección e igual sentido



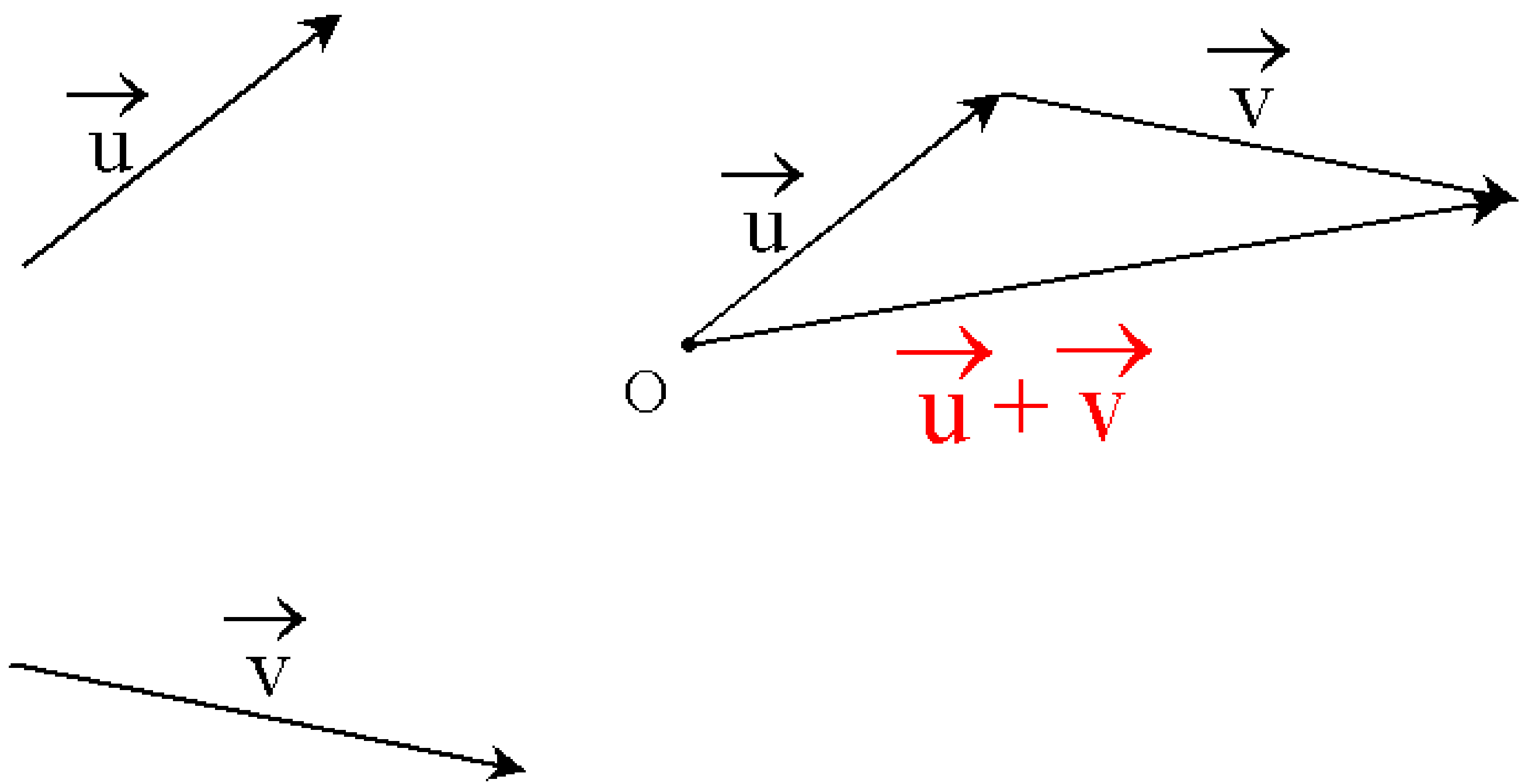
Los vectores libres del espacio

Dado un vector fijo, el conjunto de todos los vectores equipolentes con él, se dice que forman un vector libre. Al conjunto de los vectores libres del espacio se le llama V^3.

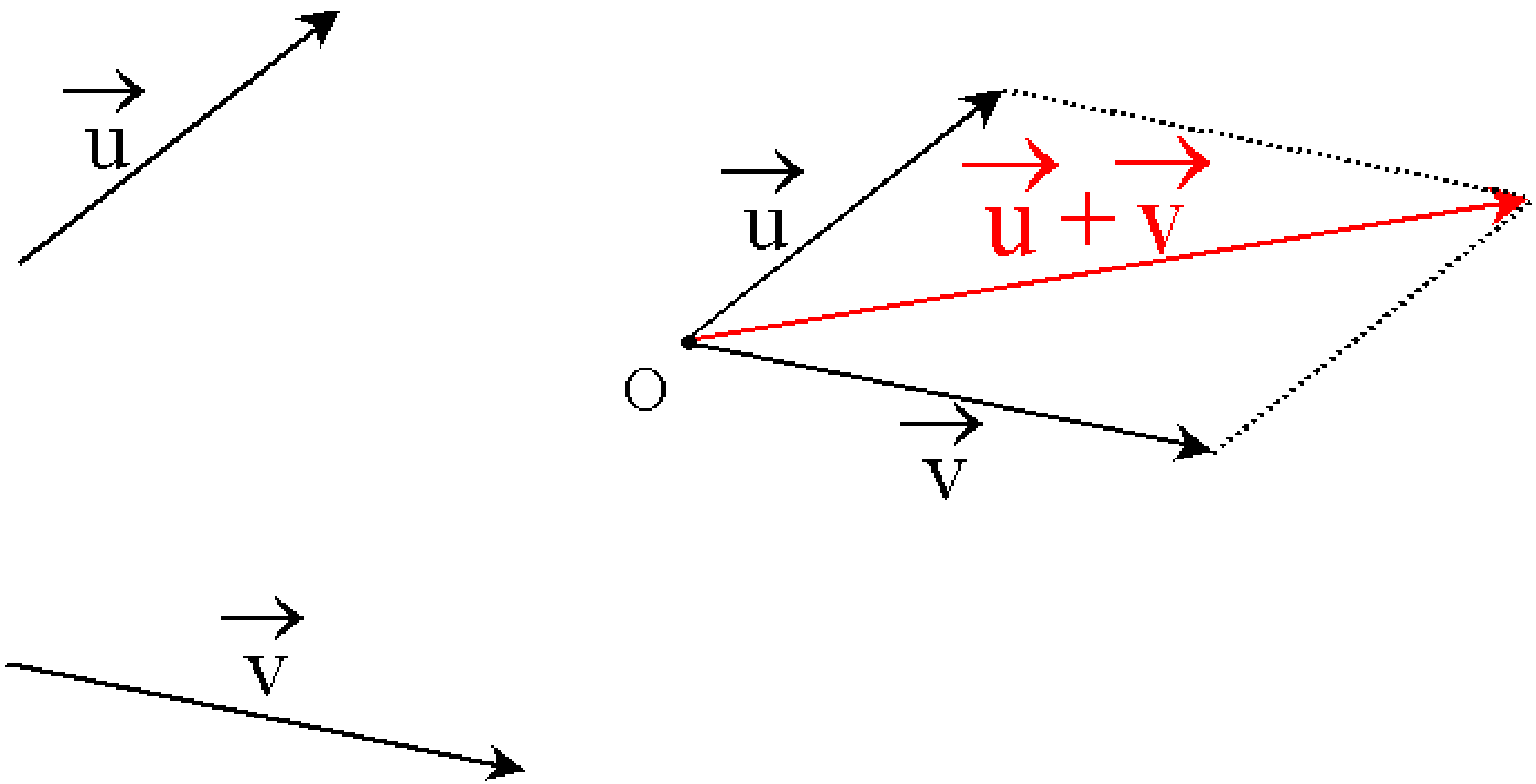


- **El vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $[\overrightarrow{AB}]$**
- **El vector fijo $\overrightarrow{CD}$ es un representante del vector libre $[\overrightarrow{CD}]$**

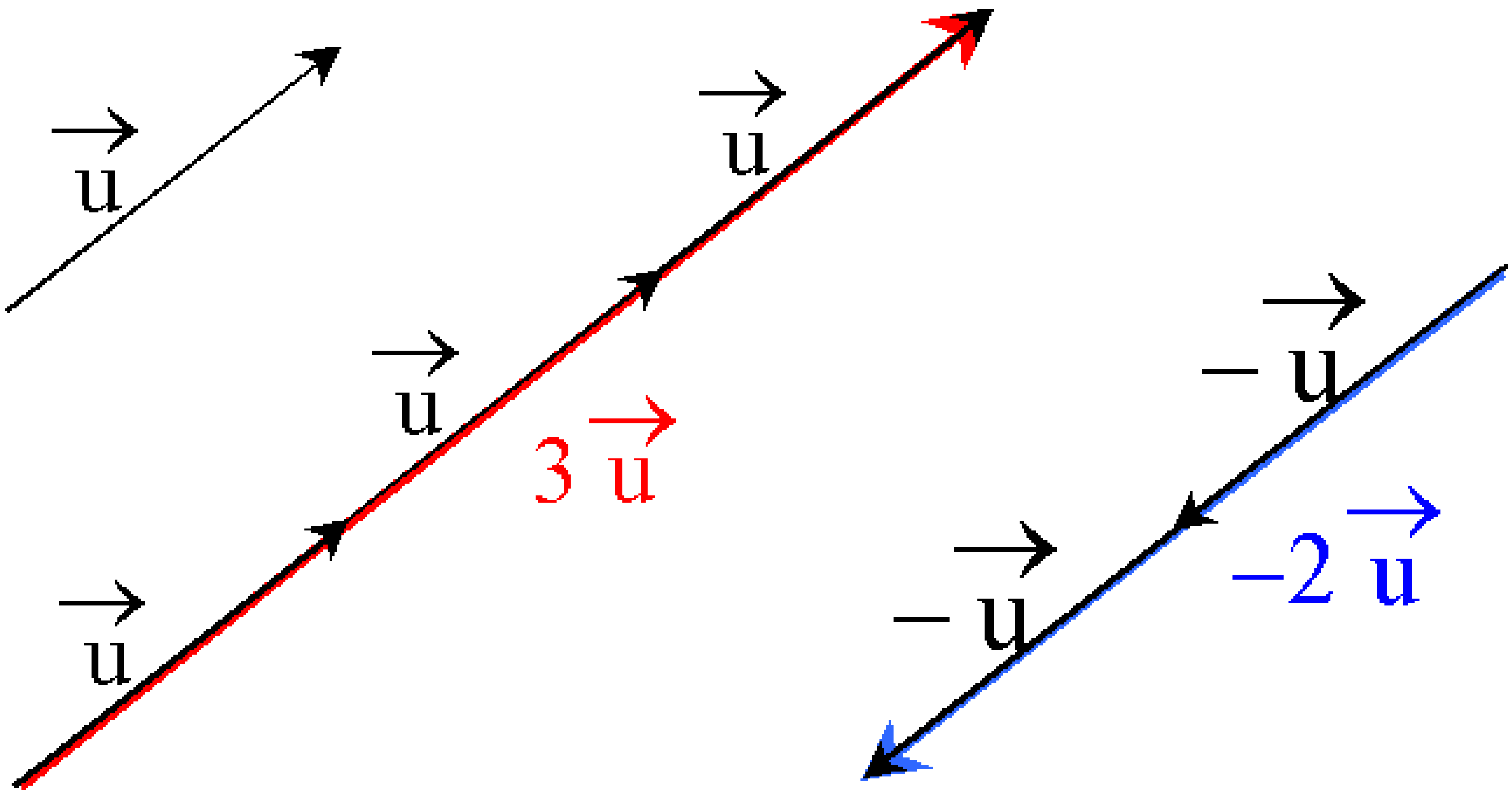
Suma de vectores libres



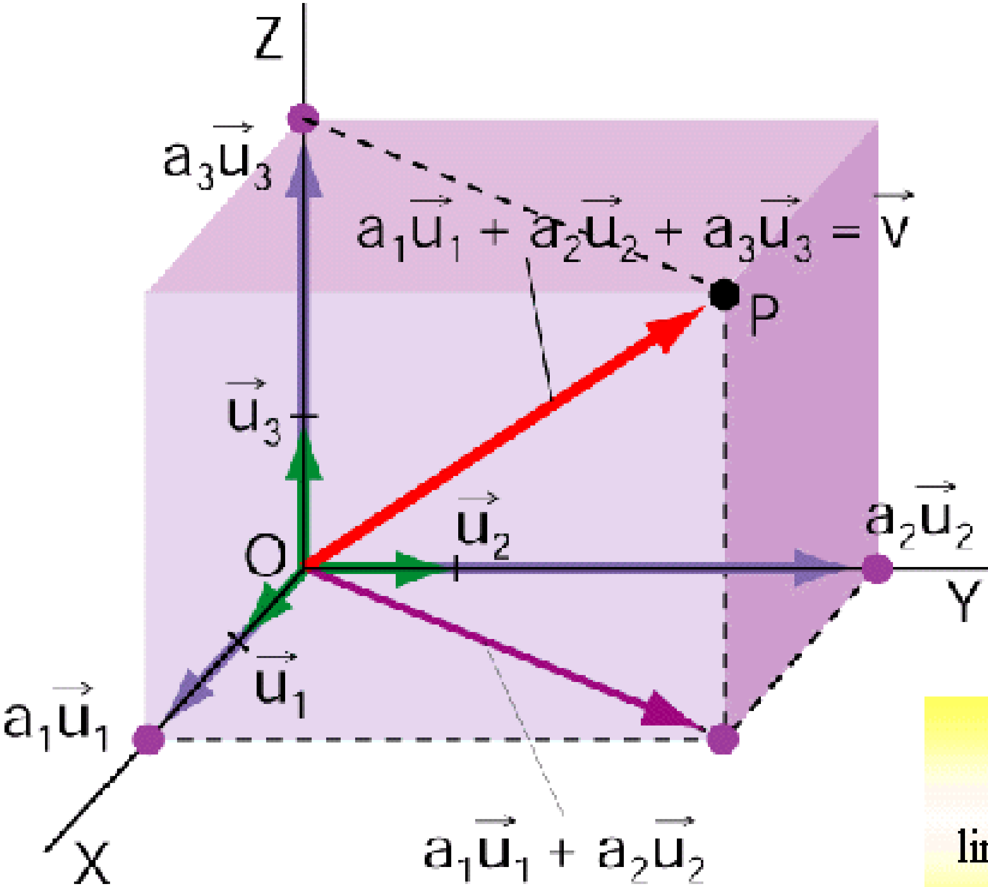
Otra forma de sumar vectores libres: regla del paralelogramo



Producto de un número real por un vector



Combinación lineal y dependencia lineal de vectores



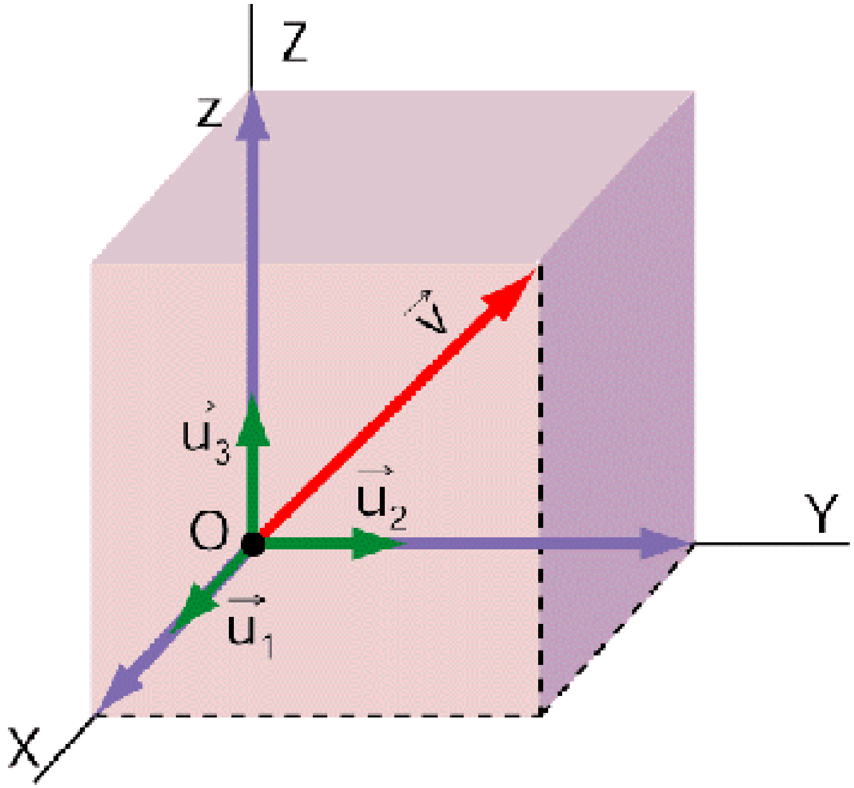
Un vector $\vec{v}$ de V^3 es combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ de V^3 si puede expresarse así:

$$\vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$

siendo a_1, a_2, a_3 números reales

Se dice entonces que $\vec{v}$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$

Bases de V^3

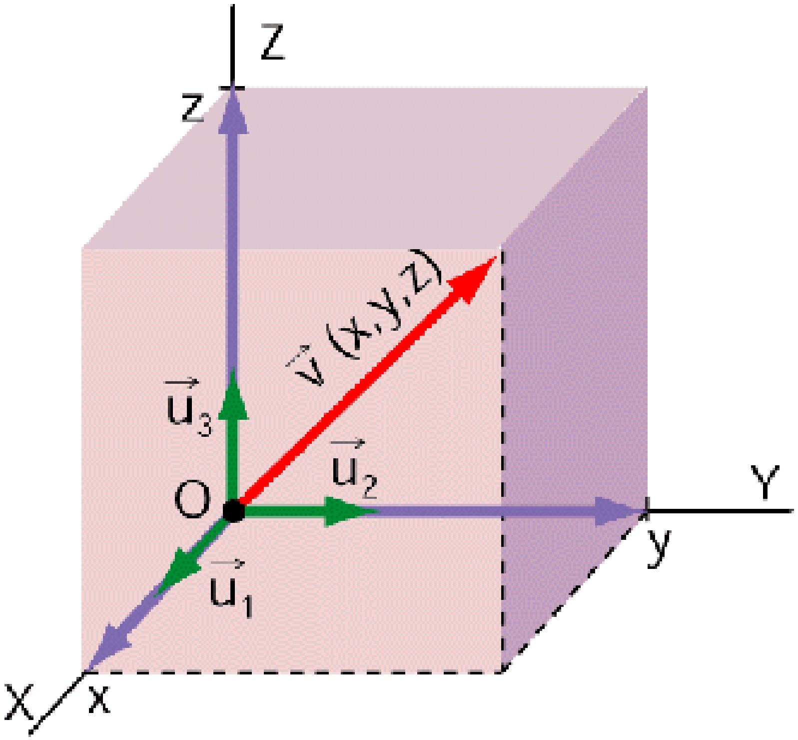


El conjunto $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de V^3 forma una base ya que:

- Son linealmente independientes.
- Cualquier vector de V^3 se puede expresar como combinación lineal de ellos

Además: tres vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ no nulos y no coplanarios forman una base de V^3.

Coordenadas de un vector



(x, y, z) son las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de V^3 si se verifica que

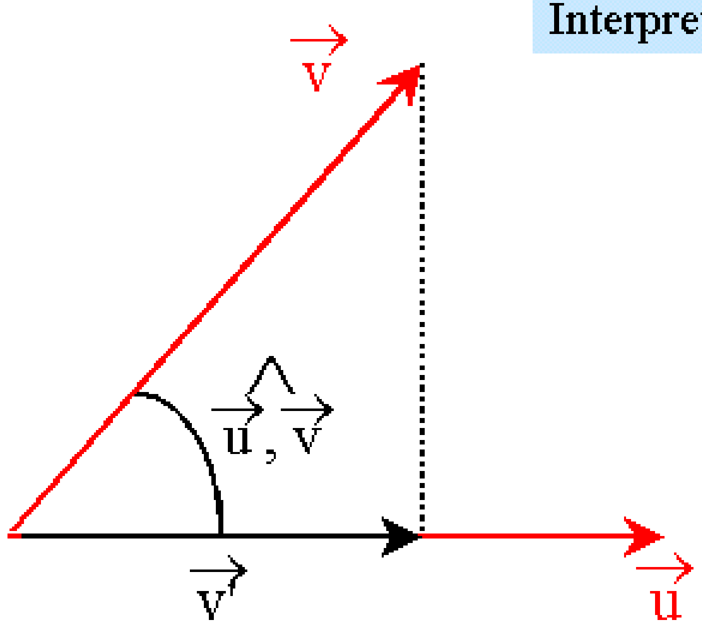
$$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

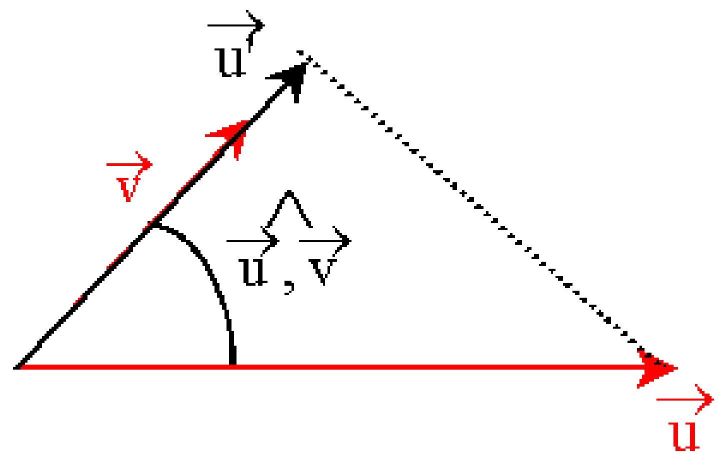
- Las coordenadas de un vector respecto a una base son únicas.
- A cada vector $\vec{v}$ se le hace corresponder una única terna (x, y, z) y viceversa

Producto escalar de dos vectores libres

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \text{ si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ no son nulos} \\ 0 \text{ si } \vec{u} \text{ ó } \vec{v} \text{ son nulos} \end{cases}$$

Interpretación geométrica





$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v'}|$$

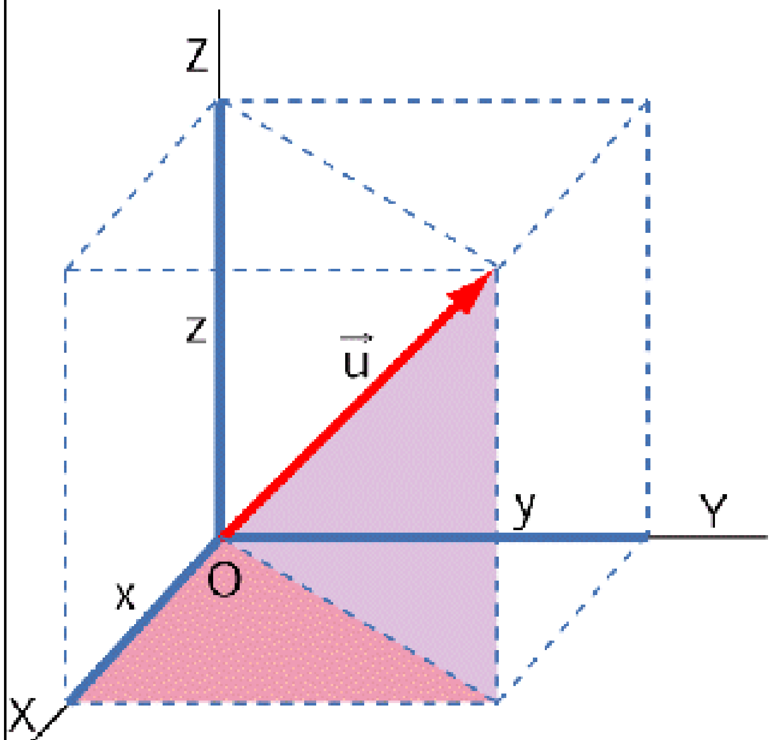
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u'}|$$

Propiedades del producto escalar

El producto escalar cumple las siguientes propiedades:

- $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$
- **Conmutativa:** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- **Homogénea:** $k(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (k\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (k\vec{y})$
- **Distributiva respecto a la suma:** $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
- El producto escalar de dos vectores puede ser cero sin que ninguno de los factores sea el vector nulo.
- Si uno de los factores (o los dos) es el vector nulo el producto escalar da cero.

Módulo de un vector



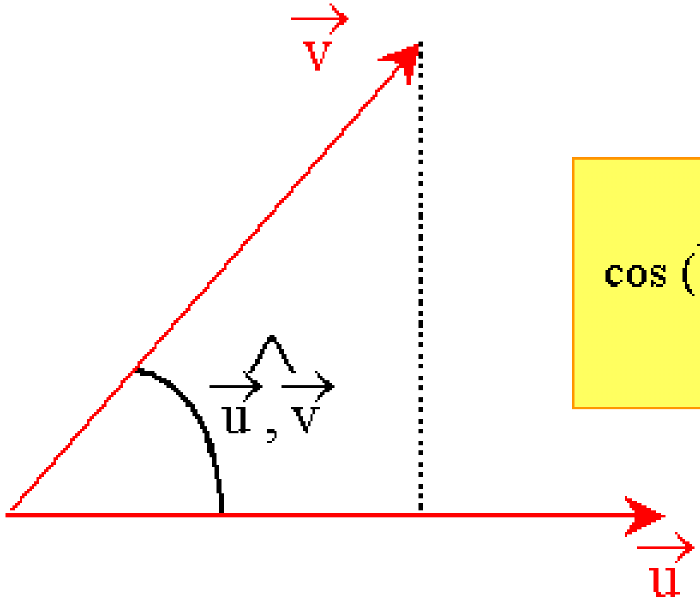
- Como $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = |\vec{u}|^2$ entonces $|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- Sea $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormal de V^3 y sea $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

  Como $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ nos queda:

$$\boxed{|\vec{u}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ángulo de dos vectores

Sea $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormal de V^3 y sean $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ y $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$.



$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Producto vectorial de dos vectores libres

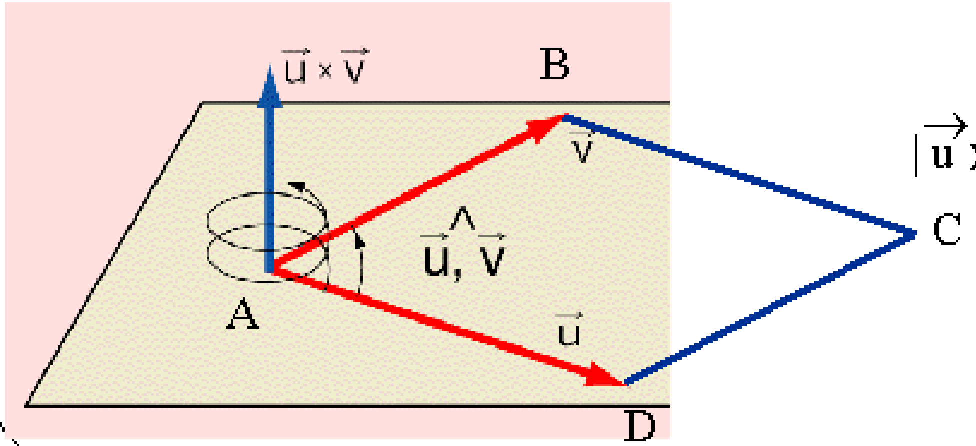
Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define $\vec{u} \times \vec{v}$ de la siguiente manera:

- Si uno de ellos es nulo o los vectores son proporcionales $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
- En caso contrario $\vec{u} \times \vec{v}$ se define como un vector que tiene:

Módulo: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ sen $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Dirección: Perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Sentido: Avance del sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$



Interpretación geométrica

$|\vec{u} \times \vec{v}|$ = Área del paralelogramo ABCD

Propiedades y expresión analítica del producto vectorial

Propiedades:

1) **Anticonmutativa:** $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$

[El producto vectorial, por lo tanto no es conmutativo]

2) **Bilinealidad:** $\begin{cases} (\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) \times \vec{z} = \alpha(\vec{x} \times \vec{z}) + \beta(\vec{y} \times \vec{z}) \\ \vec{x} \times (\alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{x} \times \vec{z}) \end{cases}$

Expresión analítica:

Sea $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormal de V^3 y sean $\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$. Entonces se cumple que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (y\,z' - y'\,z)\,\vec{i} + (z\,x' - z'\,x)\,\vec{j} + (x\,y' - x'\,y)\,\vec{k}$$

Producto mixto de tres vectores libres

Definición:

Dados $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ se define su producto mixto así: $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$

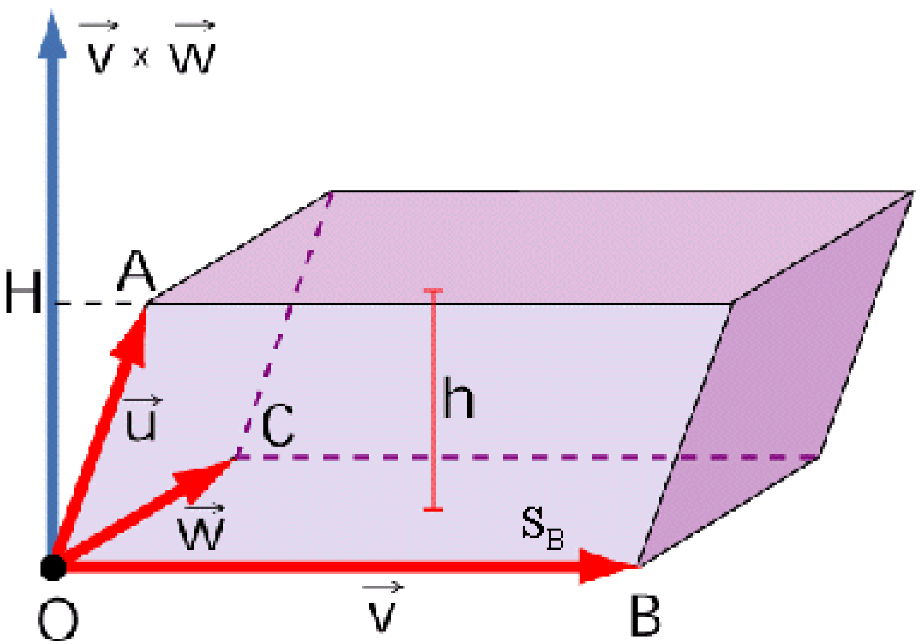
Expresión analítica:

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} =$$

$$= (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Interpretación geométrica del producto mixto



S_B = superficie de la base

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| =$$

$$|\vec{u}| \,.\, |\vec{v} \times \vec{w}| \,.\, |\cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})| =$$

$$|\overrightarrow{OH}| \,.\, |\vec{v} \times \vec{w}| = h \,.\, S_B =$$

= Volumen del paralelepípedo de aristas OA, OC y OB